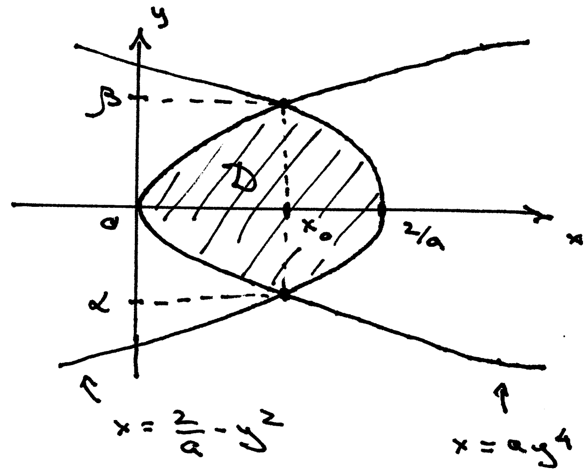
Correction de l'épreuve du 14/05/2009

MMP L2 SM S4

Exercice 1.



On cherche l'aire du domaine D déterminé par les équations

$$\begin{cases} x = ay^4 \\ ax = 2 - ay^2 \Rightarrow x = \frac{2}{a} - y^2 \end{cases}$$

Les points d'intersection (x_0, α) et (x_0, β) s'obtiennent à partir de

$$ay^4 = \frac{2}{a} - y^2 \Longrightarrow a^2y^4 + ay^2 - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = a^2 + 4 \cdot 2 \cdot a^2 = (3a)^2$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = \frac{-a + 3a}{2a^2} = \frac{1}{a}$$

ou

$$y^2 = \frac{-a - 3a}{2a^2} = -\frac{2}{a} \leftarrow \text{impossible car } a > 0,\ y^2 > 0$$

Donc $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{a}}$ et on peut réécrire l'aire (intégrale double) comme une intégrale itérée:

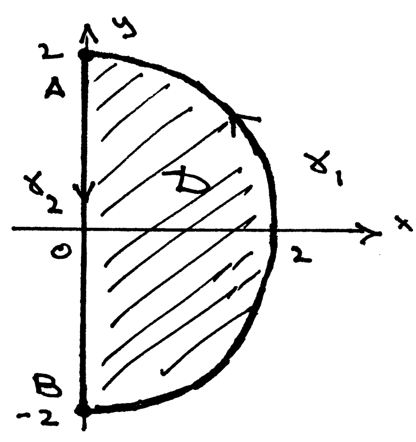
$$S = \iint_D dx\,dy = \int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} dy \int_{ay^4}^{2/a - y^2} dx = \int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} \left(\frac{2}{a} - y^2 - ay^4\right) dy =$$

$$= \left(\frac{2}{a} y - \frac{y^3}{3} - \frac{ay^5}{5}\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} = \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a\sqrt{a}} - \frac{a}{5} \frac{2}{a^2\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{a}}\left(4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{44}{15a\sqrt{a}}$$

Par conséquent la masse est $M = \sigma S = \frac{44\sigma}{15a\sqrt{a}}$.

Exercice 2.



$$I = \int_\gamma (x+y)\,dx + (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy,$$

où $P = x + y$, $Q = x^2 + y^2$.

Le contour d'intégration $\gamma_1 \cup \gamma_2$ est fermé, alors on peut appliquer le théorème de Green et transformer notre intégrale curviligne en une intégrale double:

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{=\,2x} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{=\,1}\Big)\,dx\,dy = \iint_D (2x-1)\,dx\,dy$$

En utilisant les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{cases}$ on réécrit cette dernière intégrale comme

$$I = \int_0^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, \underbrace{(2r\cos\varphi - 1)}_{2x-1}\cdot r = \int_0^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\,(2r^2\cos\varphi - r) =$$

$$= \int_0^2 dr\,(2r^2\sin\varphi - r\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \int_0^2 dr\,(4r^2 - \pi r) =$$

$$= \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{\pi r^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 2\pi.$$

2ème méthode (plus directe, mais moins rapide):

Paramétrisation de γ_1:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ t \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t\,dt \\ dy = 2\cos t\,dt \\ x+y = 2(\cos t + \sin t) \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1}(x+y)\,dx + \int_{\gamma_1}(x^2+y^2)\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(\cos t + \sin t)(-2\sin t\,dt) + 4\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-4\sin t\cos t - 4\sin^2 t + 8\cos t)\,dt =$$

$$= (\underbrace{\cancel{-2\sin^2 t}}_{0} + 8\sin t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 16 - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt = 16 - 2\Big(t - \underbrace{\cancel{\frac{\sin 2t}{2}}}_{0}\Big)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 16 - 2\pi.$$

Paramétrisation de γ_2 :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ t \in [2, -2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \\ x + y = t \\ x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

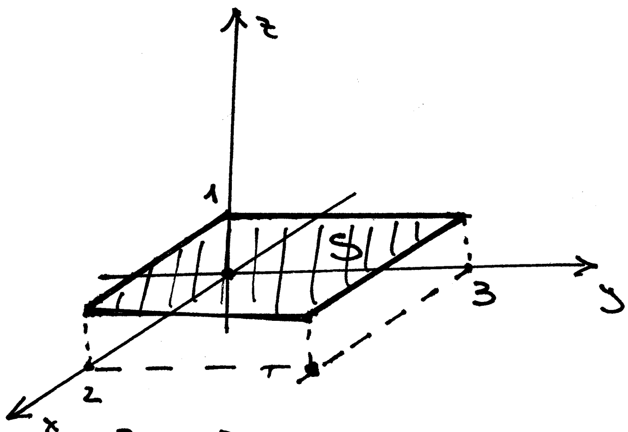
$$\int_{\gamma_2} (x+y)\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_2^{-2} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_2^{-2} = -\frac{16}{3}$$

La somme des 2 contributions donne

$$I = 16 - 2\pi - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} - 2\pi$$

ce qui coïncide, bien sûr, avec la réponse obtenue par la 1ère méthode

Exercice 3.



Vecteur normal à S est parallèle à Oz, donc

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = xy\,dS$$

(car $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$)

Donc

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_0} xy\,dS = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \cdot xy =$$

S_0 : projection de S sur le plan xy

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^3 = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9.$$

Remarque : on peut aussi procéder par paramétrisation de S :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 \\ u \in [0, 2] \\ v \in [0, 3] \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}\,'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}\,'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \int_0^2 du \int_0^3 dv \quad \vec{E}(u, v, 1) \cdot (\vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v) = \int_0^2 du \int_0^3 dv\ uv =$$

$$= \frac{u^2}{2}\Big|_0^2 \ \frac{v^2}{2}\Big|_0^3 = 9$$

Exercice 4

4.1). $f(z) = \dfrac{z}{(1-\cos z)^2}$

Les seuls candidats pour les pôles sont les zéros du dénominateur :

$$\cos z = 1 \implies z = 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

Il faut maintenant distinguer 2 cas :

- $z = 0$ $\Rightarrow$ en développant le dénominateur en série de Taylor autour de $z=0$, on obtient

$$(1-\cos z)^2 = \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots\right)^2 = \frac{z^4}{4}\left(1 - \frac{z^2}{12} + \dots\right)^2 =$$

$$= \frac{z^4}{4}\left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots\right)$$

$$f(z \to 0) \sim \frac{z}{\frac{z^4}{4}\left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots\right)} = \frac{4}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots\right) =$$

(*)
$$= \frac{4}{z^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

Donc $z = 0$ est un pôle triple.

- $z = 2\pi k$, $k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ en développant autour de $z = 2\pi k$, on obtient

$$1 - \cos z \Big|_{z \to 2\pi k} = (1-\cos z)\Big|_{z = 2\pi k} + \frac{(1-\cos z)'}{1!}\Big|_{z=2\pi k} (z - 2\pi k)$$

$$+ \frac{(1-\cos z)''}{2!}\Big|_{z=2\pi k} (z-2\pi k)^2 + \dots =$$

$$= \underbrace{(1-\cos 2\pi k)}_{=0} + \underbrace{\sin 2\pi k}_{=0}\,(z-2\pi k) + \underbrace{\cos 2\pi k}_{=1}\,\frac{(z-2\pi k)^2}{2} + \dots$$

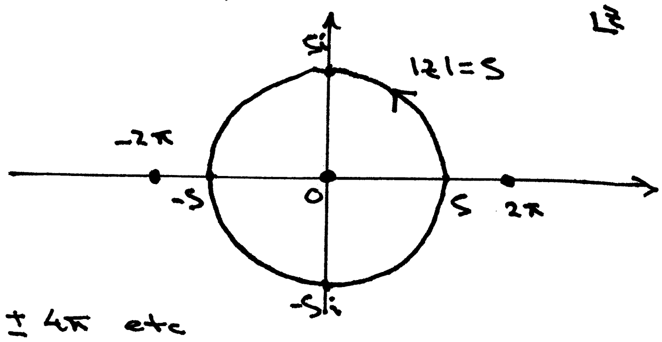
$$= \frac{(z-2\pi k)^2}{2} + \dots, \quad \text{et donc}$$

$$f(z \to 2\pi k) \sim \frac{2\pi k}{\left[\frac{(z-2\pi k)^2}{2} + \dots\right]^2} = \frac{8\pi k}{(z-2\pi k)^4} + \dots$$

— 4 — c'est-à-dire $z = 2\pi k$, $k \neq 0$ est un pôle d'ordre 4.

4.2). $\oint_C f(z)\,dz = \left| \begin{array}{l} \text{d'après le} \\ \text{théorème de résidus} \end{array} \right| =$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{\text{points singuliers} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=5}} \operatorname{res} f(z)$$



Les pôles sont $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc
Le seul pôle à l'intérieur de $|z|=5$ est $z=0$, donc

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \; a_{-1}(f)$$

où $a_{-1}(f)$ note le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent de f autour de $z=0$.
Nous avons vu précédemment que (voir $(*)$)

$$a_{-1}(f) = \frac{2}{3} \implies \oint_C f(z)\,dz = \frac{4\pi i}{3}$$

4.3). $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta + 5\sin\theta + 9}$

Une intégrale standarde calculable en utilisant le thm de résidues et le changement de variables

$$\begin{cases} e^{i\theta} = z \implies \text{contour d'intégration } |z|=1 \; \circlearrowleft \\ i e^{i\theta} d\theta = dz \implies d\theta = \dfrac{dz}{iz} \\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i} \end{cases}$$

Donc

$$I = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{iz\left[4\frac{z+z^{-1}}{2} + 5\frac{z-z^{-1}}{2i} + 9\right]} =$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{\left(2+\frac{5}{2i}\right)z^2 + 9z + \left(2-\frac{5}{2i}\right)} =$$

$$= 2\pi \sum_{\substack{\text{points} \\ \text{singuliers} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \operatorname{res} \frac{1}{\left(2+\frac{5}{2i}\right)z^2 + 9z + \left(2-\frac{5}{2i}\right)}$$

$$\left(2+\frac{5}{2i}\right)z^2+9z+\left(2-\frac{5}{2i}\right)=0$$

$$\Delta = 81-4\left(2+\frac{5}{2i}\right)\left(2-\frac{5}{2i}\right)=81-4\left(4+\frac{25}{4}\right)=40=\left(2\sqrt{10}\right)^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-9\pm 2\sqrt{10}}{2\left(2+\frac{5}{2i}\right)}$$

Il est facile à vérifier que $z_1=\dfrac{-9+2\sqrt{10}}{2\left(2+\frac{5}{2i}\right)}$ est à l'intérieur de $|z|=1$ et

$z_2=\dfrac{-9-2\sqrt{10}}{2\left(2+\frac{5}{2i}\right)}$ est à l'extérieur.

(Par exemple, on peut remarquer que $|z_1 z_2| = \left|\dfrac{2-5/2i}{2+5/2i}\right|=1$, donc $|z_1|\cdot|z_2|=1$, mais il est clair que $|z_1|<|z_2|$).

Par conséquent :

$$I = 2\pi \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{\left(2+\frac{5}{2i}\right)(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2\pi}{\left(2+\frac{5}{2i}\right)(z_1-z_2)} =$$

$$= \frac{2\pi}{\cancel{\left(2+\frac{5}{2i}\right)}\,\dfrac{-\cancel{9}+2\sqrt{10}+\cancel{9}+2\sqrt{10}}{2\,\cancel{\left(2+5/2i\right)}}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{10}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}.$$